

مفاهيم الرياضيات البحتة

تفاضل وتكامل

الصف الثالث الثانوى

الإشتقاق وتطبيقاته

اشتقاق الدوال المثلثية :

الدالة	المشتقة
جا س	جتا س
جتا س	– جا س
ظا س	قا^2 س
ظتا س	– قتا^2 س
قا س	قا س ظا س
قتا س	– قتا س ظتا س

الاشتقاق الضمنى :

اشتقاق العلاقة الضمنية: د (س ، ص) = صفر يتطلب اشتقاق كل من طرفى العلاقة بالنسبة لأحد المتغيرين س أو ص وفقًا لقاعدة السلسلة لنحصل على $\frac{ءص}{ءس}$ أو $\frac{ءس}{ءص}$ على الترتيب.

الاشتقاق البارامترى :

إذا كانت : ص = د (ن) ، س = ر (ن) يكون : $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءن} \times \frac{ءن}{ءس}$

المشتقات العليا للدالة :

إذا كانت : ص = د (س) حيث د دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س فتسمى المشتقات بدءًا من المشتقة الثانية (إن وُجدت) بالمشتقات العليا ونرمز لها بالرمز $\frac{ء^2ص}{ءس^2}$ أو ص$''$ والمشتقة الثالثة بالرمز $\frac{ء^3ص}{ءس^3}$ أو ص$'''$

و المشتقة النونية بالرمز ص$^{(ن)}$ أ، $\frac{ء^نص}{ءس^ن}$ أ، د$^{(ن)}$(س)

معادلتا المماس والعمودى لمنحنى :

إذا كان : م هو ميل المماس لمنحنى ص = د (س) عند النقطة (س$_1$ ، ص$_1$) الواقعة عليه فإن :

معادلة المماس للمنحنى هى : ص – ص$_1$ = م (س – س$_1$)

معادلة العمودى للمنحنى هى : ص – ص$_1$ = – $\frac{1}{م}$ (س – س$_1$)

المعدلات الزمنية المرتبطة :

إذا كانت : ص = د (س) ، س تتغير تبعًا لتغير الزمن ن ، فإن : ص تتغير أيضًا تبعًا لتغير الزمن ن
أى أن : ص دالة الدالة فى الزمن ن و يكون : $\frac{ءص}{ءن} = \frac{ءص}{ءس} \times \frac{ءس}{ءن}$ وتربط هذه العلاقة المعدل الزمنى لتغير س بالمعدل الزمنى لتغير ص

- يكون المعدل موجبًا إذا كان المتغير يتزايد بتزايد الزمن.
- يكون المعدل سالبًا إذا كان المتغير يتناقص بتزايد الزمن.

تفاضل وتكامل الدوال الأسية واللوغاريتمية

العدد هـ :

$\lim_{س \to \infty} (1 + \frac{1}{س})^{س} = هـ$ ، $\lim_{س \to 0} (1 + س)^{\frac{1}{س}} = هـ$

$\lim_{س \to صفر} \frac{أ^{س} - 1}{س} = لو_{هـ} أ$ ، أ > ٠ ، $\lim_{س \to صفر} \frac{لو_{أ}(1+س)}{س} = لو_{أ} هـ$ ، أ > ٠

$\lim_{س \to صفر} \frac{لو_{هـ}(1+س)}{س} = 1$

الدالة الأسية ذات الأساس الطبيعي : دالة أسية أساسها هـ حيث د (س) = $هـ^{س}$ ، س ∈ ع

دالة اللوغاريتم الطبيعي : دالة لوغاريتمية أساسها هـ حيث د (س) = $لو_{هـ}$ س ، س ∈ $ع^{+}$

التفاضل اللوغاريتمي: العلاقة بين المتغيرات يمكن ان تمثل بالصيغة اللوغريتمية وذلك بأخذ اللوغاريتم الطبيعي لطرفي العلاقة وباستخدام خواص اللوغاريتمات يتم تبسيط العلاقة قبل اجراء عمليات التفاضل.

بعض خواص اللوغاريتم الطبيعي:

إذا كان س ∈ $ع^{+}$ ، ص ∈ ع ، أ ∈ $ع^{+}$-{١} فإن :

(١) الصيغة ص = $لو_{هـ}$ س تكافئ الصيغة س = $هـ^{ص}$

(٢) س = $هـ^{لو_{هـ} س}$ (٣) $لو_{هـ}$ هـ = ١ (٤) $لو_{هـ}$ ١ = صفر (٥) $لو_{أ}$ س = $\frac{لو_{هـ} س}{لو_{هـ} أ}$

إذا كان $\text{س} \in \text{ع}^{+}$ ، $\text{ص} \in \text{ع}^{+}$ ، $\text{ن} \in \text{ع}$ فإن :

(٦) $\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} + \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص}$ (٧) $\text{لو}_{\text{هـ}}\frac{\text{س}}{\text{ص}} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص}$

(٨) $\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}^{\text{ن}} = \text{ن} \; \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$ (٩) $\text{لو}_{\text{ا}}\text{س} \times \text{لو}_{\text{س}}\text{ا} = ١$

			تكامل الدوال الأسية واللوغاريتمية		
الدالة	المشتقة	الشرط	الدالة	التكامل	الشرط
$\text{هـ}^{\text{س}}$	$\text{هـ}^{\text{س}}$	$\text{س} \in \text{ع}$	$\text{هـ}^{\text{س}}$	$\text{هـ}^{\text{س}} + \text{ث}$	$\text{س} \in \text{ع}$
$\text{هـ}^{\text{د(س)}}$	$\text{هـ}^{\text{د(س)}} \; \text{د}'(\text{س})$	د قابلة للاشتقاق	$\text{هـ}^{\text{ك س}}$	$\frac{١}{\text{ك}} \text{هـ}^{\text{ك س}} + \text{ث}$	$\text{ك} \neq ٠$
$\text{ا}^{\text{س}}$	$\text{ا}^{\text{س}} \; \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ا}$	$\text{ا} > ٠ ، \text{ا} \neq ١$	$\text{هـ}^{\text{د(س)}} \; \text{د}'(\text{س})$	$\text{هـ}^{\text{د(س)}} + \text{ث}$	د قابلة للاشتقاق
$\text{لو}_{\text{هـ}}\lvert\text{س}\rvert$	$\frac{١}{\text{س}}$	$\text{س} \neq ٠$	$\frac{١}{\text{س}}$	$\text{لو}_{\text{هـ}}\lvert\text{س}\rvert + \text{ث}$	$\text{س} \neq ٠$
$\text{لو}_{\text{هـ}}\lvert\text{د(س)}\rvert$	$\frac{١}{\text{د(س)}} \; \text{د}'(\text{س})$	د قابلة للاشتقاق ، $\text{د(س)} \neq ٠$	$\frac{١}{\text{د(س)}} \; \text{د}'(\text{س})$	$\text{لو}_{\text{هـ}}\lvert\text{د(س)}\rvert + \text{ث}$	د قابلة للاشتقاق ، $\text{د(س)} \neq ٠$

سلوك الدالة ورسم المنحنيات

☎ اختبار المشتقة الأولى لاضطراد الدوال :

إذا كانت د دالة قابلة للاشتقاق على الفترة] ا ، ب [،

❖ وكان $\text{د}'(\text{س}) > ٠$ لجميع قيم $\text{س} \in$] ا ، ب [فإن : د متزايدة على] ا ، ب [

❖ وكان $\text{د}'(\text{س}) < ٠$ لجميع قيم $\text{س} \in$] ا ، ب [فإن : د متناقصة على] ا ، ب [

☎ النقطة الحرجة :

للدالة د المتصلة على [ا ، ب] نقطة حرجة (حـ ، د(حـ))

إذا كانت : $\text{حـ} \in$] ا ، ب [، $\text{د}'(\text{حـ}) = ٠$ أو $\text{د}'(\text{حـ})$ غير موجودة

☎ القيم العظمى والقيم الصغرى المطلقة :

إذا كانت د دالة معرفة على [ا ، ب] ، وكانت $\text{حـ} \in$ [ا ، ب]

← د (حـ) هى قيمة صغرى مطلقة للدالة على [ا ، ب] عندما يكون د (حـ) ≤ د (س) لكل س ∈ [ا ، ب]

← د (حـ) هى قيمة عظمى مطلقة للدالة على [ا ، ب] عندما يكون د (حـ) ≥ د (س) لكل س ∈ [ا ، ب]

☎ اختبار المشتقة الاولى للقيم القيم العظمى والقيم الصغرى المحلية :

إذا كانت (حـ ، د(حـ)) نقطة حرجة للدالة د المتصلة عند حـ ، ووجدت فترة مفتوحة حول حـ بحيث :

❖ د/ (س) > ٠ عندما س < حـ ، د/ (س) < ٠ عندما س > حـ فإن : د (حـ) قيمة عظمى محلية

❖ د/ (س) < ٠ عندما س < حـ ، د/ (س) > ٠ عندما س > حـ فإن : د (حـ) قيمة صغرى محلية

☎ نظرية:

إذا كانت د قابلة للاشتقاق علي] ا ، ب [و كان للدالة د قيمة عظمى محلية أو قيمة صغري محلية

عند حـ ∈] ا ، ب [فإن د/ (حـ) = صفر أو د/ (حـ) غير معرفة .

☎ اختبار المشتقة الثانية للقيم العظمى والصغرى المحلية :

إذا كانت د دالة قابلة للاشتقاق مرتين على الفترة] ا ، ب [، وكانت حـ ∈] ا ، ب [حيث د/ (حـ) = ٠

➢ إذا كانت : د//(حـ) <٠ فإن : د (حـ) قيمة عظمى محلية

➢ إذا كانت : د//(حـ) >٠ فإن : د (حـ) قيمة صغرى محلية

☎ تحدب المنحنيات :

إذا كانت د دالة قابلة للاشتقاق على الفترة] ا ، ب [،

- يكون منحنى الدالة د محدبًا لأسفل إذا كانت : د/ متزايدة على هذه الفترة.
- يكون منحنى الدالة د محدبًا لأعلى إذا كانت : د/ متناقصة على هذه الفترة.

☎ اختبار المشتقة الثانية لتحدب المنحنيات :

إذا كانت د دالة قابلة للاشتقاق مرتين على الفترة] ا ، ب [فإنه :

- د//(س) >٠ لجميع قيم س ∈] ا ، ب [فإن منحنى الدالة د يكون محدبًا لأسفل على] ا ، ب [
- د//(س) <٠ لجميع قيم س ∈] ا ، ب [فإن منحنى الدالة د يكون محدبًا لأعلى على] ا ، ب [

نقطة الانقلاب

إذا كانت د دالة متصلة على الفترة] ا ، ب [وكانت حـ ∈] ا ، ب [وكان لمنحني الدالة مماس عند النقطة (حـ ، د(حـ)) فان هذه النقطة تسمي نقطة انقلاب لمنحني الدالة د إذا تغير تحدب منحني الدالة عند هذه النقطة من محدب لاسفل الي محدب لاعلي او من محدب لاعلي الي محدب لاسفل

التكامل المحدد وتطبيقاته

تفاضلى الدالة :

إذا كانت د دالة قابلة للاشتقاق على فترة مفتوحة تحوى س فإن :

✓ تفاضلى ص (ويرمز له بالرمز ءص) = د/(س) ءس

✓ تفاضلى س (ويرمز له بالرمز ءس)

التكامل بالتعويض :

إحدى طرق إيجاد تكامل حاصل ضرب دالتين

فإذا كانت : ع = ر(س) دالة قابلة للاشتقاق فإن : ∫ د (ر(س)) ر/ (س) ءس = ∫ د (ع) ءع

التكامل بالتجزئ :

إحدى طرق إيجاد تكامل حاصل ضرب دالتين والتى ليست احداهما مشتقة للأخرى.

فإذا كانت ص ، ع دالتين قابلتين للاشتقاق على فترة ف

فإن : ∫ ص ءع = ص ع – ∫ ع ءص

قواعد التكاملات الأساسية :

← ∫ $س^{ن}$ ءس = $\frac{س^{ن+1}}{ن+1}$ + ث حيث ن ≠ –١

← ∫ قاس ظاس ءس = قا س + ث ، س ≠ $\frac{2ن+1}{2}\pi$ ، ن ∈ ص

← ∫ جاس ءس = – جتا س + ث

← ∫ قتاس ظتاس ءس = – قتا س + ث ، س ≠ π ن ، ن ∈ ص

← ∫ جتاس ءس = جا س + ث

← ∫ $هـ^{س}$ ءس = $هـ^{س}$ + ث

← ∫ $قا^{2}$س ءس = ظا س + ث ، س ≠ $\frac{2ن+1}{2}\pi$ ، ن ∈ ص ،

← ∫ $\frac{1}{س}$ ءس = $لو_{هـ}$ |س| + ث ، س ≠ صفر

← ∫ $قتا^{2}$س ءس = – ظتا س + ث ، س ≠ π ن ، ن ∈ ص ،

التكامل المحدد :

إذا كانت الدالة د متصلة على [ا ، ب] وكانت (ت) أى مشتقة عكسية للدالة د على نفس الفترة

فإن : $\int_{ا}^{ب} د(س)\, ءس = ت(ب) - ت(ا)$

خواص التكامل المحدد :

- $\int_{ا}^{ب} د(س)\, ءس = - \int_{ب}^{ا} د(س)\, ءس$
- $\int_{ا}^{ا} د(س)\, ءس = صفر$
- $\int_{ا}^{ب} د(س)\, ءس = \int_{ا}^{حـ} د(س)\, ءس + \int_{حـ}^{ب} د(س)\, ءس$ حيث : $حـ \in [ا ، ب]$
- $\int_{-ا}^{ا} د(س)\, ءس = صفر$ حيث : د دالة فردية
- $\int_{-ا}^{ا} د(س)\, ءس = 2 \int_{0}^{ا} د(س)\, ءس$ حيث : د دالة زوجية

المساحات :

- مساحة منطقة محددة بمنحنى الدالة المتصلة د على الفترة [ا ، ب] والمستقيمين :

$س = ا$ ، $س = ب$ حيث : $د(س) \geq 0$ هى : $م = \int_{ا}^{ب} |د(س)|\, ءس$

- مساحة منطقة محددة بمنحنى الدالتين د ، ر المتصلتين على الفترة [ا ، ب] والمستقيمين :

$س = ا$ ، $س = ب$ حيث : $د(س) \geq ر(س)$ هى : $م = \int_{ا}^{ب} |د(س) - ر(س)|\, ءس$

الحجوم الدورانية :

ينشأ المجسم الدورانى من دوران منطقة مستوية دورة كاملة حول خط مستقيم يسمى محور الدوران.

- حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بمنحنى الدالة د المتصلة على [ا ، ب] ومحور السينات والمستقيمين : $س = ا$ ، $س = ب$ دورة كاملة حول محور السينات حيث : $د(س) \geq 0$

$$ع = \pi \int_{ا}^{ب} [د(س)]^2\, ءس$$

- حجم الجسم الناشئ من دوران المنطقة المحددة بمنحنى الدالتين د ، ر المتصلتين على [ا ، ب]

والمستقيمين : س = أ ، س = ب دورة كاملة حول محور السينات حيث : د (س) ≥ ر(س)

$$ح = \pi \int_{أ}^{ب} \left| \left(د (س) \right)^2 - \left(ر (س) \right)^2 \right| ءس$$



Pure Mathematics

Differential & Integral Calculus

3rd Secondary Concepts Sheet